Ministero dell'Istruzione e del Merito
Unione Matematica Italiana

I Giochi di Archimede

- Gara Triennio -

311

30 novembre 2023

- *La prova è costituita da 16 problemi. Ogni domanda è seguita da 5 risposte indicate con le lettere* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)**, **(E)**. *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono sbagliate.*
- *Ciascuna risposta corretta vale 5 punti, ciascuna risposta sbagliata vale 0 punti. Per ogni risposta lasciata in bianco oppure illeggibile verrà assegnato 1 punto.*
- *Per ognuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.*

Il tempo che hai a disposizione per svolgere la prova è di 100 minuti.
Buon lavoro e buon divertimento!

COGNOME ______________________ NOME ______________________

CLASSE e SEZ. __________ DATA DI NASCITA ______________ SESSO ______

CONTATTO (cell. o mail) ____

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

1. Una sequenza di 6 numeri $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ è stata scelta in modo da avere $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = a_6 - a_5$. Sapendo che $a_1 + a_2 + a_3 = 11$ e $a_4 + a_5 + a_6 = 32$, indicare qual è il valore di $a_2 - a_1$.

   (A) $\frac{8}{3}$ **(B)** $\frac{5}{3}$ **(C)** 2 **(D)** $\frac{7}{3}$ **(E)** $\frac{4}{3}$

2. Dati i numeri $x = 3^{(9^4)}$ e $y = 27^{(9^3)}$, consideriamo le 4 affermazioni seguenti:
   (1) x è un quadrato perfetto; (2) $x \cdot y$ è un quadrato e un cubo perfetto;
   (3) y è un quadrato perfetto; (4) x è un divisore di y.
   Tra le 4 affermazioni precedenti, quali sono vere?

   (A) la (4) **(B)** la (2) **(C)** la (1) e la (2) **(D)** tutte e 4 **(E)** nessuna

3. In un triangolo ABC, sia D un punto sul lato BC tale che $\overline{AC} = \overline{CD}$. Sapendo che $\overline{AD} = \overline{DB}$ e che l'angolo $\widehat{B}$ è 11 volte $\widehat{C}$, l'ampiezza dell'angolo $\widehat{A}$ è ...

   (A) 128° **(B)** 129° **(C)** 131° **(D)** 130° **(E)** 132°

4. Quante volte, nell'arco di una giornata (da mezzanotte alla mezzanotte successiva), la lancetta delle ore e la lancetta dei minuti di un orologio (con un comune quadrante a 12 ore) si trovano disposte perpendicolarmente?

   (A) 44 **(B)** 48 **(C)** 24 **(D)** 22 **(E)** 46

5. Barbara vuole riordinare uno scaffale della sua libreria, dove ci sono 2 quaderni verdi, 3 blu, 2 gialli e 1 rosso. Li vuole disporre in modo che i quaderni dello stesso colore stiano tutti vicini tra loro, senza altri colori in mezzo. In quanti modi Barbara può disporre in fila, da sinistra verso destra, i suoi 8 quaderni sullo scaffale?

   (A) 360 **(B)** 144 **(C)** 432 **(D)** 96 **(E)** 576

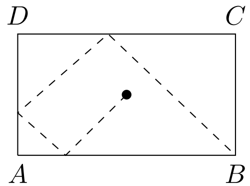
6. Si sa che $a < b < c < d$ sono numeri reali diversi da 0 e che $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{1}{d} < \frac{1}{c}$.
   Quale delle seguenti quantità è sicuramente positiva?

   (A) $-a - 2b - 4c + 3d$
   (B) $2a - b + 3c + 2d$
   (C) $-2a - 3b - c + 2d$
   (D) $-a + 3b + 4c + 5d$
   (E) $a + 2b + 3c + 4d$

7. In un'isola, ciascun abitante può essere un cavaliere, che dice sempre il vero, oppure un furfante, che mente sempre, oppure un paggio, libero di mentire o dire il vero. Per le leggi dell'isola, se più di 10 persone si riuniscono, fra loro dev'esserci almeno un cavaliere. Un giorno, 301 abitanti sono disposti in cerchio ed ognuno esclama: "vicino a me ci sono un cavaliere ed un furfante". Quanti sono, come minimo, i paggi fra le 301 persone in cerchio?

   (A) 4 **(B)** 0 **(C)** 3 **(D)** 2 **(E)** 1

8. Francesco gioca su un biliardo di dimensioni $280 \times 140\,\text{cm}$. La palla si trova nel centro del biliardo e Francesco la vuole mandare in buca nell'angolo B con una traiettoria come quella tracciata in figura (la palla rimbalza formando angoli uguali con ciascuna sponda). A quanti cm di distanza da A occorre colpire la sponda AB per realizzare la traiettoria?



   (A) 56 **(B)** 64 **(C)** 63 **(D)** 70 **(E)** 42

9. Indicare quante sono le sequenze ordinate di 5 numeri interi (a, b, c, d, e) tali che $a\,b\,c\,d\,e + 15 = 0$.

(A) 375 **(B)** 400 **(C)** 125 **(D)** 320 **(E)** 250

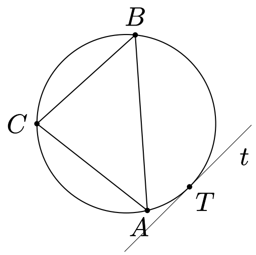
10. Gabriele ha una striscia di carta quadrettata, con quadretti di lato 1 centimetro, lunga 2023 cm. Vuole segnare ogni tacca dei centimetri, da 0 fino a 2023, con uno dei suoi 4 pennarelli colorati (rosso, giallo, verde e blu). Farà in modo che i multipli di 4, incluso 0, siano tutti segnati di blu e che non ci siano tacche vicine dello stesso colore. In quanti diversi modi Gabriele potrà realizzare la colorazione?

(A) $27 \cdot 21^{505}$ **(B)** $27 \cdot 25^{505}$ **(C)** $27 \cdot 16^{505}$ **(D)** $27 \cdot 18^{505}$ **(E)** $27 \cdot 36^{505}$

11. Tommaso e Claudia si sfidano lanciando varie volte una moneta: ogni volta che esce testa fa un punto Tommaso, quando esce croce fa un punto Claudia. Appena uno dei due arriva a 4, la partita finisce. Qual è la probabilità che la partita termini sul punteggio di 4 a 2 (per uno qualsiasi dei due)?

(A) 15/32 **(B)** 11/32 **(C)** 25/64 **(D)** 3/8 **(E)** 5/16

12. Nel triangolo ABC, gli angoli hanno queste ampiezze: $\widehat{A} = 52°$, $\widehat{B} = 57°$, $\widehat{C} = 71°$. La retta t, parallela al lato BC, è tangente alla circonferenza circoscritta al triangolo in un punto T dell'arco $\widehat{AB}$.
Qual è l'ampiezza dell'angolo $\widehat{ACT}$?



(A) 6° **(B)** 8° **(C)** 7° **(D)** 10° **(E)** 9°

13. Una tartaruga fa ogni tanto una passeggiata, partendo dalla propria tana. La passaggiata è formata da tratti rettilinei di un metro, ogni volta in una direzione a caso tra Nord, Sud, Ovest, Est. Qual è la probabilità che, dopo una passeggiata di 6 metri, la tartaruga si trovi di nuovo nella tana?

(A) 1/8 **(B)** 13/128 **(C)** 9/64 **(D)** 9/128 **(E)** 25/256

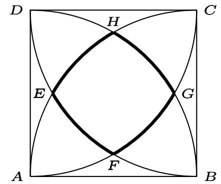
14. Considerato un poligono regolare $\mathcal{P}$ di 21 lati, stabilire quanti sono i triangoli non scaleni che si possono costruire usando tre vertici del poligono $\mathcal{P}$.

(A) 210 **(B)** 231 **(C)** 196 **(D)** 189 **(E)** 203

15. Dopo aver disegnato un rettangolo di dimensioni 78×114 cm, Chiara lo suddivide in $78 \cdot 114 = 8892$ quadratini di $1\,\text{cm}^2$, poi traccia una diagonale del rettangolo. Quanti quadratini vengono attraversati dalla diagonale?

(A) 114 **(B)** 186 **(C)** 191 **(D)** 162 **(E)** 192

16. Il quadrato $ABCD$ ha lato pari a 1 dm. Quanti dm^2 misura l'area del quadrilatero curvilineo $EFGH$, delimitato dagli archi di 4 circonferenze i cui centri sono i vertici di $ABCD$?



(A) $\frac{3\pi - \sqrt{3}}{16}$ **(B)** $\frac{\pi - \sqrt{3}}{4}$ **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **(D)** $1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$ **(E)** $2 - \sqrt{3}$