Ministero dell'Istruzione e del Merito

Unione Matematica Italiana

Giochi di Archimede 2023

Soluzioni Gara Biennio (versione 211)

Problema 1. La risposta corretta è **(C)**.

Qualunque sia il risultato del dado a 6 facce, c'è precisamente un risultato del dado a 20 facce per avere due punteggi uguali. La probabilità cercata è quindi pari a $1/20$.

Problema 2. La risposta corretta è **(A)**.

Con le cifre a disposizione, per avere un multiplo di 4 le ultime due cifre devono essere 12, oppure 52, oppure 28, oppure 88. Per ciascuna di queste 4 possibilità, la cifra iniziale può essere scelta liberamente, in 4 modi. I multipli di 4 sono pertanto $4 \cdot 4 = 16$.

Problema 3. La risposta corretta è **(E)**.

Essendo ACD un triangolo isoscele con angolo al vertice $\widehat{C} = 16°$, si ha $\widehat{CAD} = \widehat{ADC} = 82°$. Essenso $\widehat{ADC}$ un angolo esterno al triangolo ADB, si avrà che $\widehat{B} + \widehat{BAD} = \widehat{ADC} = 82°$. Dato che $\overline{AD} = \overline{BD}$, si avrà $\widehat{B} = \widehat{BAD}$, perciò $\widehat{B} = 41°$.

Problema 4. La risposta corretta è **(B)**.

I 3 quaderni verdi possono essere riordinati in $3 \cdot 2 = 6$ modi, i 2 quaderni blu in 2 modi, i 2 quaderni rossi in 2 modi. I 3 blocchi di colore possono essere disposti in 6 modi. Complessivamente, le possibilità sono $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 = 144$.

Problema 5. La risposta corretta è **(E)**.

Se indichiamo con d la differenza tra un numero e il precedente nella sequenza (che è costante), si avrà $a_2 = a_1 + d$ e $a_3 = a_1 + 2d$, quindi $a_1 + a_2 + a_3 = 3a_1 + 3d$. Allo stesso modo, $a_4 + a_5 + a_6 = 3a_4 + 3d$. Dunque $(a_4 + a_5 + a_6) - (a_1 + a_2 + a_3) = 3a_4 - 3a_1 = 3(a_4 - a_1)$, ossia $a_4 - a_1 = (19 - 7)/3 = 4$.

Problema 6. La risposta corretta è **(B)**.

(1) è vera, visto che l'esponente $4^6 = 2^{12}$ è pari, quindi $2^{(4^6)} = 2^{(2^{12})} = \left(2^{(2^{11})}\right)^2$.
(2) è vera, visto che $4^6 = 2^{12}$ è minore di $6^5 = 2^5 \cdot 3^5$ (infatti, eliminato il fattore comune 2^5, si ha che $2^7 = 128$ è minore di $3^5 = 243$).
(3) è vera per le stesse ragioni di (1), visto che anche l'esponente 6^5 è pari.
Anche (4) è vera, visto che 6^5 è multiplo di 3, quindi $2^{(6^5)} = 2^{(2^5 \cdot 3^5)} = \left(2^{(2^5 \cdot 3^4)}\right)^3$.

Problema 7. La risposta corretta è **(A)**.

Per prima cosa, si ha $\widehat{BCA} = 180° - (58° + 54°) = 68°$.
L'angolo $\widehat{CDA}$ è un angolo esterno del triangolo BCD, perciò $\widehat{CDA} = \widehat{DBC} + \widehat{BCD} = 54° + 68°/2 = 88°$.
Allo stesso modo, $\widehat{DEA}$ è un angolo esterno di CDE, perciò $\widehat{DEA} = \widehat{CDE} + \widehat{ECD} = 88°/2 + 68°/2 = 78°$.
Infine, per la medesima ragione, $\widehat{AFE} = \widehat{DEF} + \widehat{FDE} = 78°/2 + 88°/2 = 83°$.

Problema 8. La risposta corretta è **(C)**.

Le tacche 1 e 2 dovranno essere colorate una di giallo e una di rosso. Si hanno 2 possibili sequenze nella colorazione delle tacche 1 e 2. Lo stesso accade per le tacche 4 e 5, per le tacche 7 e 8, e così via, per tutte le coppie comprese tra due multipli di 3. Visto che $2023 = 3 \cdot 674 + 1$, avremo 674 coppie come quelle sopra, ciascuna colorabile in 2 modi, più la tacca finale 2023, che potrà a sua volta essere colorata in 2 modi. Le possibilità sono pertanto $2^{674} \cdot 2 = 2^{675}$.

Problema 9. La risposta corretta è **(A)**.

Se i 4 numeri a, b, c, d fossero tutti positivi, dovremmo avere $\frac{1}{d} < \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. Dato che si ha $\frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{1}{d}$, significa che si ha $a < b < c < 0 < d$. La quantità $-2a - 3b - c + d$ è quindi senz'altro positiva, essendo la somma di 4 numeri positivi. Si può vedere che ciascuna delle altre 4 quantità non sempre è positiva, sostituendo al posto di a, b, c, d una quaterna di valori con $a < b < c < 0 < d$. Ad esempio, $-a + 4b - c + 3d$: ponendo $a = -5$, $b = -4$, $c = -3$, $d = 1$, si ottiene $-a + 4b - c + 3d = -5$. In modo similare, tutte le altre espressioni possono essere rese negative con scelte opportune di a, b, c, d.

Problema 10. La risposta corretta è **(E)**.

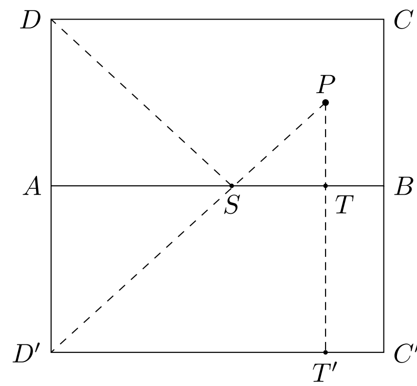
Per prima cosa, osserviamo che deve esserci almeno un paggio. In caso contrario, dovrebbero essere tutti furfanti o cavalieri, con almeno un cavaliere: procedendo in uno dei due versi, si avrebbe quindi una sequenza furfanti-cavalieri del tipo FCCFCCF... che però non può chiudersi precisamente in 11 passi (per potersi chiudere, il numero di persone dovrebbe essere multiplo di 3).
Introducendo un paggio P, la sequenza può chiudersi in questo modo: FCCFCCFCCFP.
Il paggio è circondato da due furfanti e quindi sta mentendo, così come i due furfanti che gli sono vicini.

Problema 11. La risposta corretta è **(C)**.

Per prima cosa osserviamo che, se $x=0$ oppure $y=0$, l'uguaglianza è rispettata. Se, invece, x e y sono entrambi diversi da 0, l'uguaglianza equivale a $x\,y^2 = 7$. In questo caso, dato che y^2 non può essere negativo e non può avere valore 7 per y intero, l'unica possibilità è che sia $x=7$ e $y^2=1$, ossia $x=7$ e $y=1$ oppure $x=7$ e $y=-1$ (2 coppie). Restano da contare le coppie con $x=0$ oppure $y=0$. Per $x=0$, i possibili valori di y sono 41 (20 positivi, 20 negativi, 1 nullo), tutti validi. Stessa cosa per $y=0$. Tuttavia, in questi conteggi la coppia $(0,0)$ è stata considerata 2 volte, 1 delle quali va perciò sottratta. In conclusione, il numero di coppie utili è $2 + 41 + 41 - 1 = 83$.

Problema 12. La risposta corretta è **(B)**.

Consideriamo il rettangolo simmetrico di $ABCD$ rispetto al lato AB. L'uguaglianza degli angoli formati con il lato AB nel percorso PSD implica che il segmento SD', simmetrico di SD, debba essere allineato con PS.



Ciò significa che il punto S è l'intersezione tra il segmento AB e il segmento PD'.
Per trovare la misura di ST, basta osservare che i triangoli rettangoli PST e $PD'T'$ sono simili.
Dal momento che PT è $1/3$ di PT', anche ST sarà $1/3$ di $D'T'$, vale a dire $\overline{ST} = 228/3\,\text{cm} = 76\,\text{cm}$.
Pertanto $\overline{SB} = \overline{ST} + \overline{TB} = 76\,\text{cm} + 52\,\text{cm} = 128\,\text{cm}$.

Problema 13. La risposta corretta è **(E)**.

Il vertice V comune ai lati uguali del triangolo isoscele può essere uno qualsiasi dei 25 vertici di $\mathcal{P}$. Dopo aver scelto V, gli altri due vertici possono essere scelti in 12 modi, dovendo essere alla stessa distanza da V. In tutto, le possibilità sono quindi $25 \cdot 12 = 300$. Ciascun triangolo è contato una volta sola in quanto, per ogni triangolo isoscele, è univocamente individuato il vertice comune ai due lati uguali (non potendo essere un triangolo equilatero, visto che 25 non è multiplo di 3).

Problema 14. La risposta corretta è **(D)**.

Partendo da un vertice V, immaginiamo un punto P che si sposti procedendo lungo la diagonale VV' del rettangolo. Ogni volta che P attraversa una linea divisoria (orizzontale o verticale) della quadrettatura, il punto P cambia la casella dove si trova. Notiamo che, prima di raggiungere V', non può succedere che P attraversi nel contempo una linea orizzontale ed una verticale, ossia un vertice della quadrettatura, perché 83 e 120 sono primi tra loro. Nel tragitto da V fino a V', il punto P attraverserà in tutto $82 + 119 = 201$ linee della quadrettatura, ossia cambierà casella 201 volte. Considerata anche quella iniziale, il numero di caselle visitate sarà dunque 202.

Problema 15. La risposta corretta è **(A)**.

Utilizzeremo, nell'ordine, i simboli $\uparrow$, $\downarrow$, $\rightarrow$, $\leftarrow$ per indicare, un tratto verso Nord, Sud, Est, Ovest. La passeggiata della tartaruga sarà rappresentata da una sequenza di 6 caratteri, ciascuno preso tra questi simboli. Per trovarsi ancora alla tana dopo 6 tratti è necessario e sufficiente che i 6 caratteri siano 3 coppie di simboli opposti (ossia $\uparrow\downarrow$ e $\rightarrow\leftarrow$). La condizione specificata nel testo (la tartaruga non può mai voltarsi indietro) significa che nella sequenza non possano comparire due simboli opposti consecutivamente. Dunque i 6 tratti non potranno essere tutti in direzione $\uparrow\downarrow$ o $\rightleftarrows$; dovranno essere 4 in una direzione e 2 nell'altra.
Supponiamo che siano, ad esempio, 4 in direzione $\uparrow\downarrow$ e 2 nell'altra (ovviamente il numero delle possibili passeggiate sarà lo stesso se succede il contrario). Per evitare che vi siano tratti opposti consecutivi, i 2 tratti opposti in direzione $\rightleftarrows$ dovranno essere in posizioni non consecutive e collocati in modo che fra i 4 mancanti non possano esservi 3 tratti di fila (in direzione $\uparrow\downarrow$). Pertanto, i 2 tratti in direzione $\rightleftarrows$ devono trovarsi o nelle posizioni 1 e 4, oppure 2 e 4, oppure 2 e 5, oppure 3 e 5, oppure 3 e 6. Per ciascuna di queste 5 situazioni, ci sono 4 possibili passeggiate, tenendo conto che si può scegliere in 2 modi come collocare i simboli $\rightarrow$ e $\leftarrow$ e che inoltre le coppie di tratti consecutivi in direzione $\uparrow\downarrow$ debbono essere o $\uparrow\uparrow$ o $\downarrow\downarrow$. In conclusione, le passeggiate con 2 tratti in direzione $\rightleftarrows$ e 4 tratti in direzione $\uparrow\downarrow$ sono in tutto $5 \cdot 4 = 20$. Altre 20 saranno le passeggiate con 2 tratti in direzione $\uparrow\downarrow$ e 4 in direzione $\rightleftarrows$, per un totale di 40.

Problema 16. La risposta corretta è **(B)**.

Per trovare l'area di $A'B'C'$, possiamo sottrarre dall'area di ABC (che è di $\frac{30 \cdot 40}{2} = 600$ mm^2) la somma delle aree di $A'BC'$, $C'AB'$, $B'CA'$. Si vede subito che $\mathcal{A}_{A'BC'} = \frac{20 \cdot 25}{2} = 250$ mm^2. Per determinare le aree di $C'AB'$ e $B'CA'$, conviene tenere conto di questo fatto: se in un triangolo XYZ si prendono due punti X' e Z' rispettivamente sui lati XY e YZ, allora $\mathcal{A}_{X'YZ'} = h\,k\,\mathcal{A}_{XYZ}$, dove $h = \overline{YX'}/\overline{YX}$ e $k = \overline{YZ'}/\overline{YZ}$. Considerato che dal teorema di Pitagora si ricava che $\overline{AC} = 50\,\text{mm}$, si ottiene quanto segue:
$\mathcal{A}_{C'AB'} = \frac{AC'}{AB} \cdot \frac{AB'}{AC} \cdot \mathcal{A}_{BAC} = \frac{5}{30} \cdot \frac{5}{50} \cdot 600\,\text{mm}^2 = 10\,\text{mm}^2$
$\mathcal{A}_{B'CA'} = \frac{CB'}{CA} \cdot \frac{CA'}{CB} \cdot \mathcal{A}_{ACB} = \frac{45}{50} \cdot \frac{1}{2} \cdot 600\,\text{mm}^2 = 270\,\text{mm}^2$.
Risulta pertanto $\mathcal{A}_{A'B'C'} = 600 - (250 + 10 + 270)$ mm$^2 = 70$ mm^2.