Ministero dell'Istruzione e del Merito

Unione Matematica Italiana

Giochi di Archimede 2023

Soluzioni Gara Triennio (versione 311)

Problema 1. La risposta corretta è **(D)**.

Se indichiamo con d la differenza tra un numero e il precedente nella sequenza (che è costante), si avrà $a_2 = a_1 + d$ e $a_3 = a_1 + 2d$, quindi $a_1 + a_2 + a_3 = 3a_1 + 3d$. Allo stesso modo, $a_4 + a_5 + a_6 = 3a_4 + 3d$. Dunque $(a_4 + a_5 + a_6) - (a_1 + a_2 + a_3) = 3a_4 - 3a_1 = 3(a_4 - a_1)$, ossia $a_4 - a_1 = (32 - 11)/3 = 7 = 3d$. Segue che $d = 7/3 = a_2 - a_1$.

Problema 2. La risposta corretta è **(B)**.

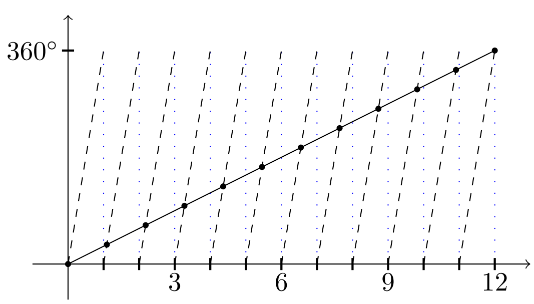
(1) è falsa, visto che in $x = 3^{(9^4)} = 3^{(3^8)}$ la base 3 è un numero primo e l'esponente 3^8 è dispari.
(2) è vera, visto che $xy = 3^{(9^4)} \cdot 3^{(3 \cdot 9^4)} = 3^{(9^4) + 3 \cdot (9^4)} = 3^{(4 \cdot 9^4)}$.
L'esponente è multiplo sia di 2 sia di 3, pertanto xy è un quadrato ed è anche un cubo.
(3) è falsa, dato che $y = 3^{3 \cdot 9^3} = 3^{3 \cdot 3^6} = 3^{(3^7)}$ non è un quadrato, essendo l'esponente 3^7 dispari.
(4) è falsa, visto che $x = 3^{(3^8)}$, $y = 3^{(3^7)}$ e $3^8 > 3^7$.

Problema 3. La risposta corretta è **(E)**.

Posto $x = \widehat{C}$, si ha $\widehat{CAD} = \widehat{CDA} = 90° - \frac{x}{2}$. Pertanto $\widehat{ADB} = 90° - \frac{x}{2} + x = 90° + \frac{x}{2}$ (angolo esterno al triangolo ACD) e quindi $\widehat{B} = \widehat{BAD} = (180° - \widehat{ADB})/2 = 90° - (45° + \frac{x}{4}) = 45° - \frac{x}{4}$. Pertanto si ha $11x = 45° - \frac{x}{4}$, da cui $x = \widehat{C} = 4°$, $\widehat{B} = 44°$ e $\widehat{A} = 132°$.

Problema 4. La risposta corretta è **(A)**.

Vediamo cosa succede nell'arco di mezza giornata, da mezzanotte a mezzogiorno. Possiamo rappresentare in un diagramma, al trascorrere del tempo (in ore), quale angolo formano la lancetta delle ore (linea continua) e la lancetta dei minuti (linee tratteggiate) con la semiretta dal centro del quadrante verso ore 0.



Le intersezioni tra la linea continua e le linee tratteggiate corrispondono agli istanti in cui le due lancette si sovrappongono, cosa che avviene ogni 11^a parte di giro, ossia ogni 12/11 di ora. Durante ciascuno di tali 11 intervalli di tempo, le due lancette sono per 2 volte perpendicolari: a 1/4 e a 3/4 di ogni intervallo (a metà intervallo sono invece opposte). In mezza giornata, le lancette sono quindi perpendicolari $11 \cdot 2 = 22$ volte. Nell'arco di una giornata, la cosa avviene pertanto 44 volte.

Problema 5. La risposta corretta è **(E)**.

I 4 colori possono essere disposti in $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ modi.
I 2 quaderni verdi possono essere disposti in 2 modi.
I 3 quaderni blu possono essere disposti in $3! = 6$ modi.
I 2 quaderni gialli possono essere disposti in 2 modi.
Il quaderno rosso può essere disposto in 1 solo modo.
Nel complesso, gli 8 quaderni potranno essere riordinati in $24 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 = 576$ modi.

Problema 6. La risposta corretta è **(C)**.

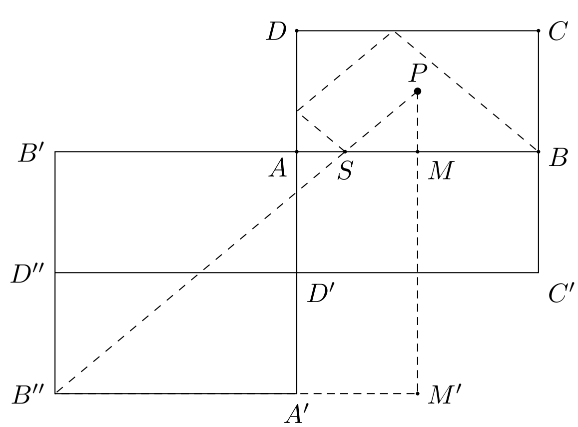
Se i 4 numeri a, b, c, d fossero tutti positivi, dovremmo avere $\frac{1}{d} < \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. Dato che si ha $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{1}{d} < \frac{1}{c}$, significa che deve essere $a < b < 0 < c < d$. La quantità $-2a - 3b - c + 2d$ è quindi senz'altro positiva, visto che $-2a - 3b$ dovrà essere positivo, come anche $-c + 2d = (-c + d) + d$ (essendo $0 < c < d$). Si può vedere che ciascuna delle altre 4 quantità non sempre è positiva, sostituendo al posto di a, b, c, d una quaterna di valori con $a < b < 0 < c < d$. Ad esempio, $-a + 3b + 4c + 5d$: ponendo $a = -10$, $b = -9$, $c = 1$, $d = 2$, si ottiene $-a + 3b + 4c + 5d = -3$. In modo similare, tutte le altre espressioni possono essere rese negative con scelte opportune di a, b, c, d.

Problema 7. La risposta corretta è **(D)**.

Per prima cosa, osserviamo che deve esserci almeno un paggio. In caso contrario, dovrebbero essere tutti furfanti o cavalieri, con almeno un cavaliere: procedendo in uno dei due versi, si avrebbe quindi una sequenza furfanti-cavalieri del tipo FCCFCCFCC... che però non può chiudersi precisamente in 301 passi (per potersi chiudere, il numero di persone dovrebbe essere multiplo di 3).
Deve quindi esserci almeno un paggio. Notiamo che un paggio non può essere vicino a un cavaliere, dovrà essere necessariamente circondato da furfanti o altri paggi. Se bastasse un solo paggio per chiudere la sequenza, dovremmo (per quanto appena detto) avere uno schema del tipo FCCFCC...FCCFP, dove P rappresenta il paggio. Il numero di persone presenti sarebbe in questo caso del tipo $3n + 2$, quindi non potrebbero essere 301.
Con due paggi, invece, si riesce a chiudere la sequenza in modo coerente, con una disposizione del tipo FCCFCC...FCCFPFP.

Problema 8. La risposta corretta è **(A)**.

Ad ogni rimbalzo contro una sponda, possiamo immaginare che la palla, anziché tornare indietro, prosegua la sua corsa nel rettangolo simmetrico rispetto alla sponda dove è avvenuto il rimbalzo. L'uguaglianza degli angoli formati nei rimbalzi implica che tale traiettoria "virtuale" è rettilinea: essa può essere rappresentata come riportato nella figura sottostante.



Per determinare la misura di SM, basta osservare che i triangoli rettangoli PMS e $PM'B''$ sono simili.
Dal momento che PM è 1/5 di PM', anche SM sarà 1/5 di $B''M'$, vale a dire $\overline{SM} = 420/5\,\text{cm} = 84\,\text{cm}$.
Pertanto $\overline{AS} = \overline{AM} - \overline{SM} = 140\,\text{cm} - 84\,\text{cm} = 56\,\text{cm}$.

Problema 9. La risposta corretta è **(B)**.

L'equazione richiesta equivale a $abcde = -15$.
In un primo momento, contiamo le sequenze ordinate dove a, b, c, d, e sono interi positivi con $abcde = 15$. Questo avviene in due casi: o una delle incognite vale 15 e le altre sono tutte uguali a 1 (5 possibili scelte della sequenza), oppure una vale 5, una vale 3 e le altre sono uguali a 1 ($5 \cdot 4 = 20$ possibili scelte della sequenza). Vi sono quindi $20 + 5 = 25$ scelte della sequenza ordinata (a, b, c, d, e) di interi positivi in maniera che $abcde = 15$. Per fare in modo che si abbia $abcde = -15$, a partire da una delle sequenze suddette, occorre rendere negativi una quantità dispari dei segni delle 5 incognite. Osserviamo che, complessivamente, sono $2^5 = 32$ le possibili scelte dei segni della sequenza ordinata (a, b, c, d, e). Di queste, quelle dove i segni negativi sono una quantità dispari sono la metà, vale a dire 16.
Le due scelte (quella dei valori assoluti e quella dei segni) possono essere combinate liberamente, ottenendo così tutte le possibili soluzioni intere dell'equazione considerata, che sono pertanto $25 \cdot 16 = 400$.

Problema 10. La risposta corretta è **(A)**.

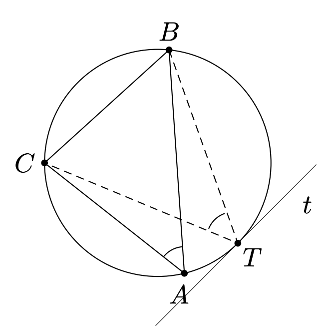
Vediamo in quanti modi si possono scegliere i colori delle tacche 1, 2, 3. Si possono distinguere due casi, a seconda che uno dei tre colori sia il blu oppure no. Se una delle tre tacche è blu, essa deve essere quella di mezzo, ossia quella che corrisponde a 2; le tacche 1 e 3 potranno allora essere scelte liberamente, ciascuna in 3 modi possibili, per un totale di $3 \cdot 3 = 9$ possibilità. Se nessuna delle tacche è blu, allora la tacca 1 si potrà scegliere in 3 modi, la tacca 2 in 2 modi (i 3 colori a disposizione meno quello utilizzato per la tacca 1) e poi la tacca 3 ancora in 2 modi: ossia, $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ possibilità. Nel complesso, le possibili colorazioni delle tacche 1, 2, 3 sono quindi $9 + 12 = 21$. Lo stesso avviene per le tacche 5, 6, 7, per le tacche 9, 10, 11, e così via. Visto che $2023 = 4 \cdot 505 + 3$, ci sono 505 gruppi di 3 tacche, ciascuno dei quali può essere colorato in 21 diversi modi e le colorazioni di questi gruppi sono tra loro indipendenti, per un totale di 21^{505} possibili colorazioni dei 505 gruppi di 3 tacche. Restano infine le ultime 3 tacche, quelle corrispondenti a 2021, 2022, 2023, per ciascuna delle quali vi sono 3 scelte a disposizione. In conclusione, le colorazioni ammissibili sono pertanto $21^{505} \cdot 3^3$.

Problema 11. La risposta corretta è **(E)**.

Affinché la partita termini sul punteggio di 4 a 2 per Tommaso, occorre che nei primi 5 lanci escano 3 teste e 2 croci (il che accade con probabilità pari a $\binom{5}{3}/2^5 = \frac{5}{16}$), poi nel 6° lancio deve uscire testa (probabilità $\frac{1}{2}$). La probabilità che tutto ciò accada è quindi uguale a $\frac{5}{16} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$. Allo stesso modo, anche la probabilità che la partita si concluda 4 a 2 per Claudia è pari a $\frac{5}{32}$. La probabilità richiesta è pertanto uguale a $\frac{5}{32} + \frac{5}{32} = \frac{5}{16}$.

Problema 12. La risposta corretta è **(C)**.

Il fatto che la tangente in T sia parallela alla corda BC significa che T è il punto medio dell'arco maggiore $\widehat{BC}$, quindi BTC è un triangolo isoscele.



Dato che $\widehat{BTC} = \widehat{BAC} = 52°$, si avrà $\widehat{BCT} = (180° - 52°)/2 = 64°$ e dunque $\widehat{ACT} = \widehat{ACB} - \widehat{TCB} = 71° - 64° = 7°$.

Problema 13. La risposta corretta è **(E)**.

Contiamo quante sono le passeggiate con 6 tratti da un metro, al termine delle quali la tartaruga si trova di nuovo alla tana.
Utilizzeremo, nell'ordine, i simboli $\uparrow$, $\downarrow$, $\rightarrow$, $\leftarrow$ per indicare, un tratto verso Nord, Sud, Est, Ovest. Qualsiasi passeggiata della tartaruga sarà rappresentata da una sequenza di 6 caratteri, ciascuno preso tra questi simboli. Per trovarsi ancora alla tana dopo 6 tratti è necessario e sufficiente che i 6 caratteri siano 3 coppie di simboli opposti (ossia $\uparrow\downarrow$ e $\rightarrow\leftarrow$). Vi sono dunque 4 possibilità: 3 coppie tutte del tipo $\uparrow\downarrow$, oppure 2 coppie $\uparrow\downarrow$ e 1 coppia $\rightleftarrows$, oppure oppure 1 coppia $\uparrow\downarrow$ e 2 coppie $\rightleftarrows$, oppure 3 coppie $\rightleftarrows$. Contiamo quante sono le sequenze di 6 tratti che rientrano nei primi due casi (gli altri due saranno evidentemente le medesime quantità).
Se i simboli sono $\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow$, le possibili permutazioni saranno $\frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$.
Se invece i simboli sono $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rightarrow\leftarrow$, le possibili permutazioni saranno $\frac{6!}{2!\cdot 2!} = 180$.
In tutto, le passeggiate nella quali la tartaruga è di nuovo alla tana dopo 6 metri saranno dunque il doppio di $20 + 180$, vale a dire 400. Poiché le possibili passeggiate di 6 metri sono $4^6 = 2^{12}$, si conclude che la probabilità cercata è uguale a $400/2^{12} = 25/256$.

Problema 14. La risposta corretta è **(C)**.

Il vertice V da cui escono i lati uguali del triangolo isoscele può essere uno qualsiasi dei 21 vertici di $\mathcal{P}$. Dopo aver scelto V, gli altri due vertici possono essere scelti in 10 modi, dovendo essere alla stessa distanza da V. In tutto, le possibilità sono quindi $21 \cdot 10 = 210$. In questo conteggio, tuttavia, ciascun triangolo equilatero è stato contato 3 volte, una volta per ciascuno dei propri vertici. Occorre quindi sottrarre da 210 il doppio del numero di triangoli equilateri presenti tra i vertici di $\mathcal{P}$, che sono $21 : 3 = 7$. La quantità richiesta è quindi $210 - 14 = 196$.

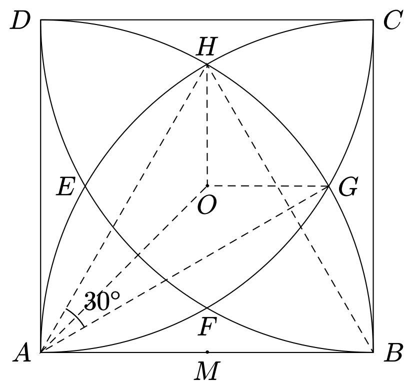
Problema 15. La risposta corretta è **(B)**.

Partendo da un vertice V, immaginiamo un punto P che si sposti procedendo lungo la diagonale VV' del rettangolo. Ogni volta che P attraversa una linea divisoria (orizzontale o verticale) della quadrettatura, il punto P cambia la casella dove si trova. Se le misure a e b di lati del rettangolo fossero prime tra loro, si avrebbe che, dopo aver lasciato V, per la prima volta il punto P incontrerebbe sul suo cammino un vertice della quadrettatura proprio al suo arrivo in V'. In tal caso, il numero totale di caselle visitate sarebbe uguale a $a + b - 1$, dato che il punto P cambierebbe casella per $(a-1) + (b-1) = a + b - 2$ volte.
Supponendo, più in generale, che $MCD(a, b) = k$, ossia $a = k\,\alpha$ e $b = k\,\beta$, con α e β primi tra loro, lo stesso schema sopra descritto si ripete per k volte lungo k rettangoli di lati $\alpha \times \beta$ che vengono attraversati dalla diagonale. In ciascuno di essi, la diagonale attraversa $\alpha + \beta - 1$ caselle, pertanto le caselle attraversate saranno nel complesso $k\cdot(\alpha + \beta - 1) = a + b - k$. Nel nostro caso, dove $a = 78$ e $b = 114$, si ha $MCD(a, b) = 6$, pertanto il numero di caselle attraversate sarà uguale a $78 + 114 - 6 = 186$.

Problema 16. La risposta corretta è **(D)**.

Detto O il centro del quadrato $ABCD$, la superficie della quale viene richiesta l'area è l'unione di 4 regioni congruenti al triangolo curvilineo $\widehat{GOH}$, delimitato dall'arco $\widehat{GH}$ e dai segmenti GO e OH. Per calcolare $\mathcal{A}_{\widehat{GOH}}$, osserviamo che $\widehat{GOH}$ è la differenza tra il settore circolare $\widehat{GAH}$ (avente centro A e arco $\widehat{GH}$) ed il quadrilatero $AGOH$, il quale a sua volta è il doppio del triangolo AOH.

Notiamo poi che $\widehat{DAH} = 30°$. Infatti ABH è un triangolo equilatero, dunque $\widehat{BAH} = 60°$.
Stesso discorso vale per l'angolo $\widehat{BAG}$, quindi anche $\widehat{GAH} = 30°$.



Ne segue che $\mathcal{A}_{\widehat{GAH}} = \frac{1}{12} \cdot \pi \,\overline{AB}^2 = \frac{\pi}{12}\,\text{dm}^2$.

Per determinare l'area di AOH, un modo rapido è prendere OH come base e AM come altezza (dove M è il punto medio di AB). Visto che ABH è un triangolo equilatero, si ha $\overline{OH} = \overline{MH} - \overline{MO} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,\text{dm} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,\text{dm}$.

Risulta perciò $\mathcal{A}_{AOH} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OH} \cdot \overline{AM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{1}{2}\,\text{dm}^2 = \frac{\sqrt{3}-1}{8}\,\text{dm}^2$.

Si ottiene quindi che $\mathcal{A}_{AGOH} = 2\,\mathcal{A}_{AOH} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}\,\text{dm}^2$ e $\mathcal{A}_{\widehat{GOH}} = \mathcal{A}_{\widehat{GAH}} - \mathcal{A}_{AGOH} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{4}\,\text{dm}^2$.

Si conclude pertanto che l'area richiesta è pari a $4\,\mathcal{A}_{\widehat{GOH}} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1$.